

УДК 539.19

Дремов В.В. – к.ф.-м.н., доц., Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

Недопекин Ф.В. – д.т.н., проф., Донецкий национальный университет

Минакова О.А. – ст. преп., Донецкий национальный технический университет

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СТЕНОК ИЗЛОЖНИЦЫ НА ДВИЖЕНИЕ ФРОНТА ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ПЛОСКОГО СЛИТКА

Теоретически исследовано влияние теплопроводности стенок плоской клинообразной изложницы на скорость движения фронта затвердевания. Уравнения нестационарной теплопроводности в жидкой и твердой фазах записаны в цилиндрической системе координат. Приближенные нестационарные решения для температур получены вариационным методом с использованием локального термодинамического потенциала. Стыковка этих решений на фронте кристаллизации позволила найти закон движения фронта затвердевания. Влияние изложницы и окружающей среды учитывается линейной функцией, полученной из приравнивания потока тепла, текущего через стенку, и рассеивающегося в окружающую среду. Показано, что при уменьшении теплопроводности стенок изложницы движение фронта затвердевания замедляется.

Ключевые слова: изложница, фронт затвердевания, коэффициент теплопроводности, коэффициент теплоотдачи, функционал, вариация, поток тепла.

Введение

Влияние толщины стенок изложницы на затвердевание изучали как теоретически [1, 2], так и экспериментально [3, 4]. Мнения авторов достаточно противоречивы, что отмечается в [2], и здесь же приводятся расчеты, полученные при численном решении задачи затвердевания стального слитка в чугунной изложнице, которые в основном совпадают с экспериментами [4]. Отмечено, что с увеличением толщины стенки чугунной изложницы процесс затвердевания стального слитка ускоряется. Влияние изменения теплопроводности стенок изложницы с помощью теплоизолирующих вкладышей, вставляемых в прибыль, описано в [2].

Целью данной работы является – теоретическое исследование влияния теплопроводности стенок плоской клинообразной изложницы на скорость движения фронта затвердевания.

Постановка задачи

В предлагаемой работе теоретически исследуется затвердевание металла в изложницах с большим и малым коэффициентом теплопроводности стенок и дна. Изложница представляет собой емкость в виде усеченного клина с одинаковой толщиной стенок и дна рис. 1. После заполнения изложницы поверхность жидкого металла покрывают теплоизолирующим слоем шлака. Так как дно изложницы находится на теплоизолирующей песчаной подушке, то затвердевание металла в основном происходит от боковых стенок. Поток тепла через верх и дно изложницы пренебрегаем.

Задача рассматривается в цилиндрической системе координат r, φ, z . Предполагается, что длина изложницы вдоль координаты z велика по сравнению с поперечными размерами, поэтому не учитываем зависимость температуры от z . Система уравнений теплопроводности для твердой и жидкой фаз записывается в пренебрежении вязким трением жидкого металла и поперечными составляющими скорости v_φ по сравнению с продольной v_r , направленной вдоль фронта затвердевания. Поэтому уравнение теплопроводности для жидкой фазы примет вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + v_r \frac{\partial T_1}{\partial r} = a_1 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} \right],$$

$$r_\phi \leq r \leq R_2, 0 \leq \varphi \leq \varphi_\phi. \quad (1)$$

В твердой фазе

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \varphi^2} \right], R_1 \leq r \leq r_\phi, \varphi_\phi \leq \varphi \leq \alpha_1. \quad (2)$$

Система уравнений (1) и (2) решается совместно с граничными условиями:

$$T_1 = T_\kappa \quad \text{при } r = r_\phi \text{ и } \varphi = \varphi_\phi; \quad \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{при } \varphi = 0; \quad (3)$$

$$T_2 = T_\kappa \quad \text{при } r = r_\phi \text{ и } \varphi = \varphi_\phi; \quad T_2 = T_n \quad \text{при } r = R_1 \text{ и } \varphi = \alpha_1. \quad (4)$$

Толщина затвердевшего металла определяется по формуле

$$\varepsilon = r_\phi (\alpha_1 - \varphi_\phi) \quad (5)$$

в предположении, что угол α_1 мал.

В начальный момент, когда $t = 0$, твердая фаза отсутствует, то $T_1(r, \varphi, 0) = T_n$ при $R_2 > r > R_1$ и $\alpha_1 > \varphi > 0$. При $\varphi = \alpha_1$, $r > R_1$ и $t > 0$ имеем

$$T_1(r_\phi, \varphi_\phi, t_\phi) = T_\kappa, \quad T_2(r, \varphi_1, t) = T_n. \quad (6)$$

На фронте затвердевания выполняется условие равенства тепловых потоков:

$$\lambda_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} \right)_{\substack{\varphi=\varphi_\phi \\ r=r_\phi}} + L_1 \rho_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \lambda_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=\varphi_\phi, r=r_\phi}. \quad (7)$$

Тепловой поток из твердой фазы слитка проходит через стенки изложницы и рассеивается в окружающую среду, поэтому можно записать, что

$$\frac{\lambda_3}{\delta} (T_n - T_u) = \alpha (T_u - T_c), \quad (8)$$

где λ_3 – коэффициент теплопроводности, Вт/м·К; δ – толщина стенок изложницы, м; α – коэффициент теплоотдачи, Вт/м²·К; T_u – температура наружных стенок изложницы, К; T_c – температура окружающей среды, К; T_n – температура внутренней поверхности изложницы, К.

Из уравнений (1), (2) и граничных условий (2)–(7) следует найти три неизвестные функции $T_1(r, \varphi, t)$, $T_2(r, \varphi, t)$, $\varepsilon(t)$, а из уравнения (8) определить температуру поверхности слитка T_n , при заданных значениях других величин, которая будет использована при расчете скорости движения фронта затвердевания $\varepsilon(t)$.

Точное решение по r уравнения (1) в предположении, что $v_r = 0$ имеет вид:

$$T_1 = \frac{(T_n - T_\kappa) \ln r + T_\kappa \ln R_2 - T_n \ln r_\phi}{\ln(R_2 / r_\phi)}. \quad (9)$$

Найдем приближенное решение стационарного уравнения, полученного из (1), которое при умножении на r и делении на a имеет вид

$$\frac{v_r}{a_1} r T_r - T_r - r T_{rr} - \frac{1}{r} T_{\varphi\varphi} = 0, \quad (10)$$

где $T_r = \partial T / \partial r$, $T_{rr} = \partial^2 T / \partial r^2$, $T_{\varphi\varphi} = \partial^2 T / \partial \varphi^2$.

Решаем задачу вариационным методом с использованием понятия локального термодинамического потенциала, описанного достаточно подробно в [5] и [6].

Функционал, соответствующий уравнению (10), запишем в виде

$$\int_{r_\phi}^{R_2} \int_0^{\varphi_\phi} \left[2 \frac{v_r}{a_1} r T_r^0 T + r T_r^2 + \frac{1}{R} T_\varphi^2 \right] dr d\varphi = L, \quad (11)$$

где $T_r^0 = \partial T^0 / \partial r$, а индекс ноль при T_r обозначает неварьируемую производную от температуры.

Нетрудно убедиться, что если взять вариацию от L по T , что равносильно выполнению уравнения Эйлера – Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial L}{\partial T_r} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial L}{\partial T_\varphi} = 0, \quad (12)$$

найти соответствующие производные и подставить их в (12), то после сокращения на множитель 2 получим уравнение (10). Следовательно, функционал (11) соответствует уравнению (10) и функция, минимизирующая его, будет наилучшим приближенным решением (10). Ищем функцию, минимизирующую функционал (11), в виде

$$T = T(r)f(\varphi) = \left[\frac{(T_n - T_\kappa) \ln r + T_\kappa \ln R_2 - T_n \ln r_\phi}{\ln(R_2 / r_\phi)} \right] f(\varphi). \quad (13)$$

Вычисляя производные по r и φ от (13), получаем

$$T_r = \frac{T_n - T_\kappa}{r \ln(R_2 / r_\phi)}; \quad T_\varphi = \left[\frac{(T_n - T_\kappa) \ln r + T_\kappa \ln R_2 - T_n \ln r_\phi}{\ln(R_2 / r_\phi)} \right] f'(\varphi). \quad (14)$$

Подставляя (13) и (14) в (11) и интегрируя по r , находим:

$$\int_0^{\varphi_\phi} \left\{ A_1 f^0(\varphi) f(\varphi) + B_1 f^2(\varphi) + C_1 [f'(\varphi)]^2 \right\} d\varphi = L. \quad (15)$$

Функция $f(\varphi)$ выбирается так, чтобы интеграл (11) принимал минимальное значение. Этому условию удовлетворяет функция, обращающая в нуль вариацию

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial f(\varphi)} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial L}{\partial f'(\varphi)} = 0. \quad (16)$$

Взяв вариацию, получим

$$f''(\varphi) - K_1 f(\varphi) = 0. \quad (17)$$

где $K_1 = \sqrt{(A_1 + 2B_1) / 2C_1}$.

Решением уравнения (17) будет функция [7]:

$$f(\varphi) = C'_1 chK_1 \varphi + C'_2 shK_1 \varphi. \quad (18)$$

Постоянные C'_1 и C'_2 находятся из граничных условий: $T = T_\kappa$ при $\varphi = \varphi_\phi$, $\partial T / \partial \varphi = 0$ при $\varphi = 0$. Учитывая их в (18) и вычисляя, получаем $C'_2 = 0$, $C'_1 = 1 / chK_1 \varphi_\phi$. Подставляя их в (18), а последнее в (13), находим решение уравнения (10)

$$T = \frac{[(T_n - T_\kappa) \ln r + T_\kappa \ln R_2 - T_n \ln r_\phi]}{\ln(R_2 / r_\phi)} \frac{chK_1 \varphi}{chK_1 \varphi_\phi}. \quad (19)$$

Таким же методом находим решение полного нестационарного уравнения (1). Функционал, соответствующий уравнению (1), имеет вид

$$L = \int_0^{t_\phi} \int_0^{\varphi_\phi} \int_{r_\phi}^{R_2} \left[\frac{2\nu_r}{a_1} r T_r^0 T + 2 \frac{r}{a_1} T T_t^0 + r T_r^2 + \frac{1}{r} T_\varphi^2 \right] dr d\varphi dt. \quad (20)$$

Решение (1) ищем в виде функции (19), умноженной на неизвестную функцию $f(t)$:

$$T = \frac{[(T_n - T_\kappa) \ln r + T_\kappa \ln R_2 - T_n \ln r_\phi]}{\ln(R_2 / r_\phi)} \frac{chK_1\varphi}{chK_1\varphi_\phi} f(t). \quad (21)$$

Подставляя (21) и его производные по r , φ , t в (20) и интегрируя по r и φ получаем

$$L = \int_0^{t_\phi} \left\{ Kf^0(t)f(t) + Mf(t)[f'(t)]^0 + Pf^2(t) + Qf^2(t) \right\} dt. \quad (22)$$

Взяв вариацию от (22) по $f(t)$ и приравняв ее нулю, получим:

$$Mf'(t) + G_1 f(t) = 0.$$

Решением этого уравнения будет функция:

$$f(t) = C \exp(-G_1 t / M). \quad (23)$$

Учитывая (23) в (21) и условие на фронте затвердевания (3) при $t = t_\phi$, получим $C = \exp(G_1 t_\phi / M)$. Следовательно, решением уравнения (1) будет функция:

$$T_1 = \frac{[(T_n - T_\kappa) \ln r + T_\kappa \ln R_2 - T_n \ln r_\phi]}{\ln(R_2 / r_\phi)} \frac{chK_1\varphi}{chK_1\varphi_\phi} \exp\left[-\frac{G_1}{M}(t - t_\phi)\right]. \quad (24)$$

Таким же способом найдем решение уравнения (2) для твердой фазы:

$$T_2 = \frac{[(T_n - T_\kappa) \ln r + T_\kappa \ln R_1 - T_n \ln r_\phi]}{\ln(R_1 / r_\phi)} \times \frac{[shK_2(\alpha - \varphi) + shK_2(\varphi - \varphi_\phi)]}{shK_2(\alpha - \varphi_\phi)} \exp\left[-\frac{2G_2}{F_2}(t - t_\phi)\right]. \quad (25)$$

Вычислим производные по φ от (24) и (25) и подставим их в (7). Используя условие на фронте затвердевания (5), найдем скорость затвердевания по радиусу:

$$r_\phi \frac{dr_\phi}{dt} (\alpha_1 - \varphi_\phi) = \frac{T_\kappa}{L_1 \rho} \left\{ \lambda_2 K_2 \frac{1 - chK_2(\alpha_1 - \varphi_\phi)}{shK_2(\alpha_1 - \varphi_\phi)} - \lambda_1 K_1 thK_1\varphi_\phi \right\}. \quad (26)$$

Приведем вид выражений K_1 , K_2 , необходимых для численных расчетов:

$$K_1 = \sqrt{A/B}; \quad K_2 = \sqrt{A_2/B_2}; \quad A = A_1 + 2B_1; \quad B = 2C_1;$$

$$A_1 = \frac{2\nu_r(T_n - T_k)}{a_1 \ln^2(R_2/r_\phi)} \left\{ \ln \frac{R_2}{r_\phi} (T_n R_2 - T_k r_\phi) - (R_2 - r_\phi)(T_n - T_k) \right\};$$

$$B_1 = \frac{(T_n - T_k)^2}{\ln(R_2/r_\phi)}; \quad A_2 = \frac{(T_n - T_k)^2}{\ln(R_1/r_\phi)};$$

$$C_1 = \frac{1}{\ln(R_2/r_\phi)} \times$$

$$\times \left[(T_n - T_k)^2 \frac{\ln^2 R_2 + \ln R_2 \ln r_\phi + \ln^2 r_\phi}{3} + \right. \\ \left. + (T_k \ln R_2 - T_n \ln r_\phi)(T_n \ln R_2 - T_k \ln r_\phi) \right];$$

$$B_2 = \frac{1}{\ln(R_1/r_\phi)} \times$$

$$\times \left[\frac{(T_n - T_k)^2}{3} (\ln^2 R_1 + \ln R_1 \ln r_\phi + \ln^2 r_\phi) + \right. \\ \left. + (T_k \ln R_1 - T_n \ln r_\phi)(T_n \ln R_1 - T_k \ln r_\phi) \right].$$

Если в (26) зафиксировать $(\alpha_1 - \varphi_\phi)$, то получим зависимость $r_\phi(t)$ на данном значении угла:

$$r_\phi \frac{dr_\phi}{dt} = \frac{T_k}{L_1 \rho (\alpha_1 - \varphi_\phi)} C_*, \quad (27)$$

где C_* обозначает выражение в фигурных скобках (26). Решая уравнение (27), находим:

$$r_\phi = \sqrt{\frac{2T_k C_*}{L_1 \rho (\alpha_1 - \varphi_\phi)} t} + R_1^2. \quad (28)$$

Для разных углов φ_ϕ и моментов времени выполнены вычисления координат фронта затвердевания стального слитка при следующих численных значениях размеров изложницы и параметров жидкой и твердой стали: $R_1 = 1,2$ м, $R_2 = 2,2$ м, $\alpha_1 = 10^\circ$, $\alpha_2 = 12^\circ$, $T_n = 1833$ К, $T_k = 1733$ К, $T_n = 433$ К, $T_c = 300$ К, $\rho = 7,31 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_1 = 26,5$ Вт/(м·К), $\lambda_2 = 30,3$ Вт/(м·К), $\lambda'_3 = 0,325$ Вт/(м·К), $\lambda''_3 = 58,7$ Вт/(м·К), $\alpha = 68$ Вт/м²К, $a_1 = 4,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\nu_r = 10^{-2}$ м/с.

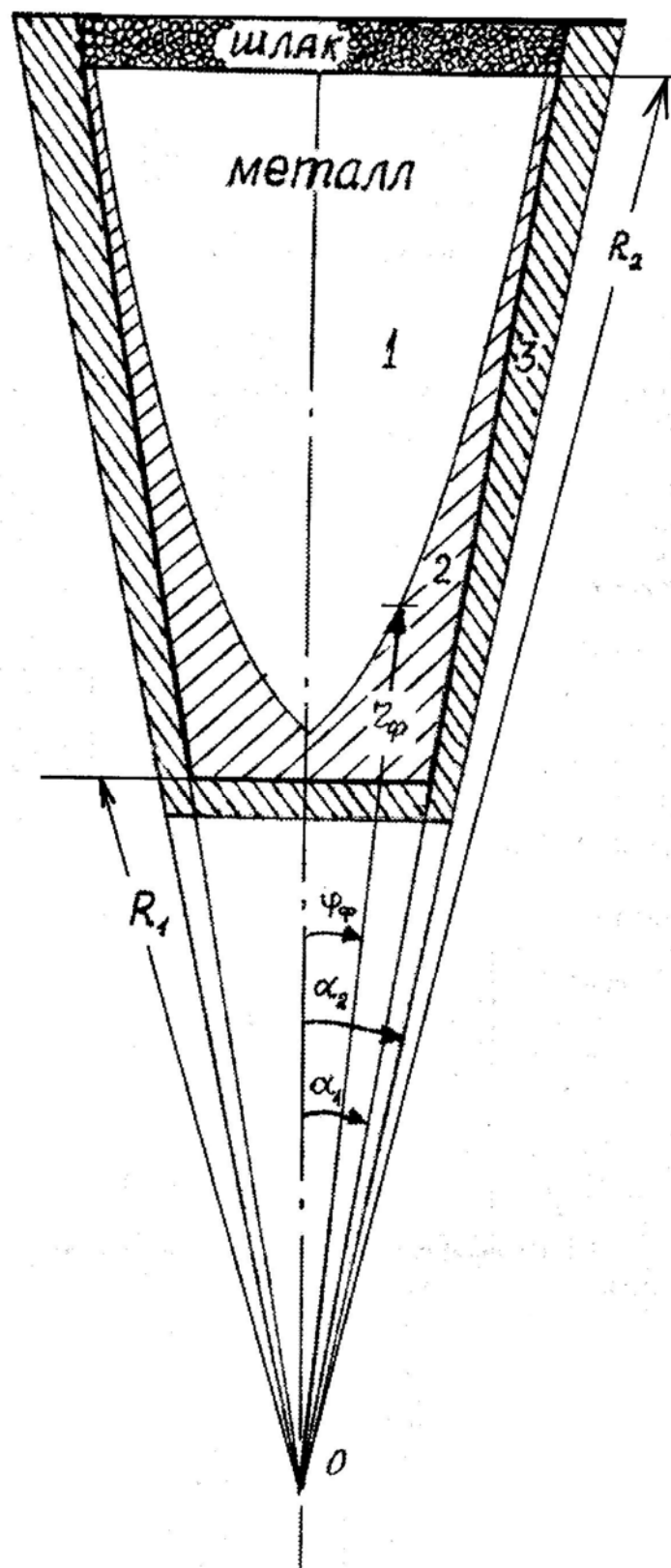


Рис. 1. Поперечное сечение изложницы:
1 – жидкая фаза; 2 – твердая фаза; 3 – изложница

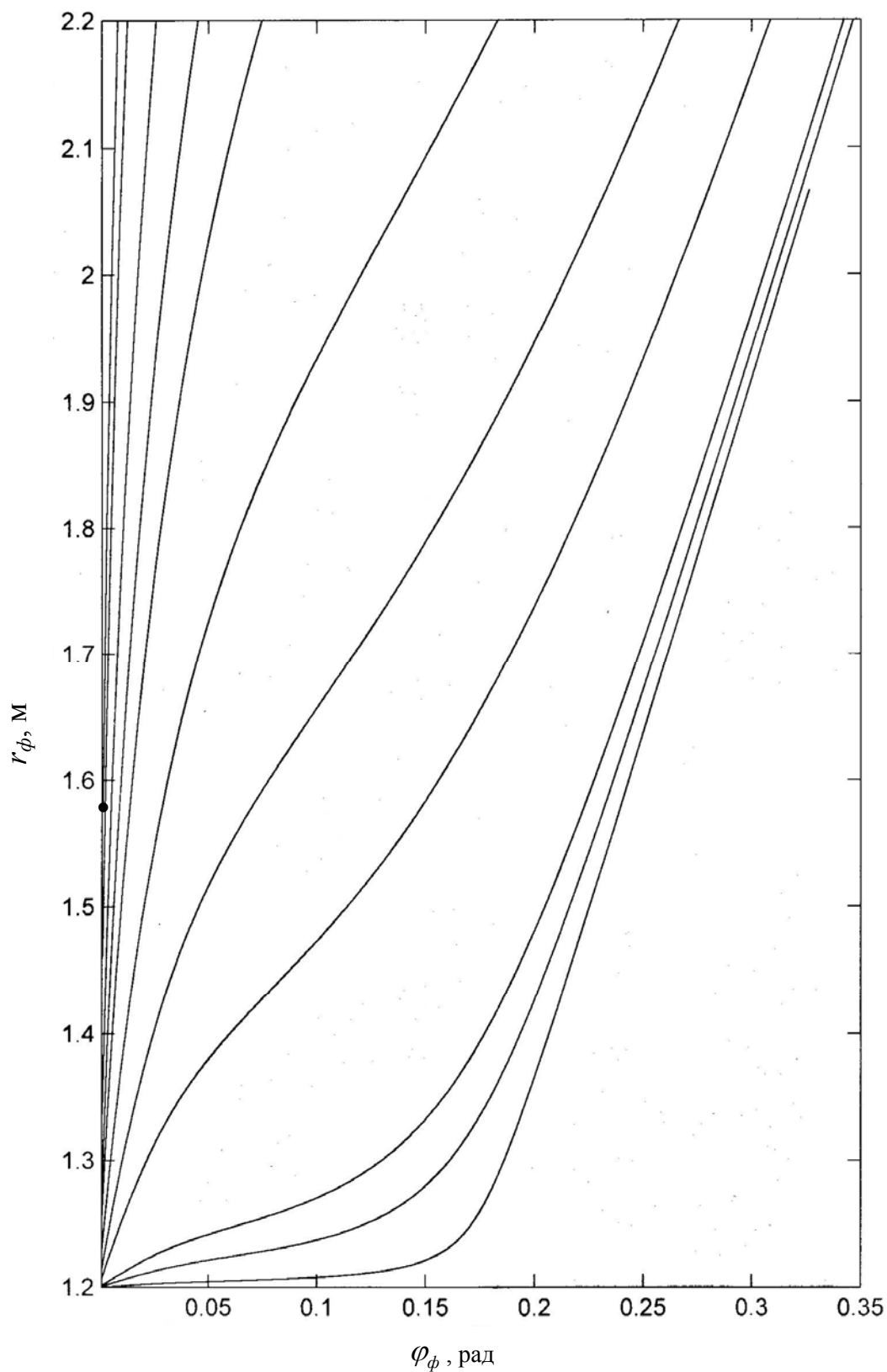


Рис. 2. Положение фронта затвердевания в изложнице с низкой теплопроводностью стенок $\lambda_3 = 0,325 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$. Черной точкой отмечено дно жидкой лунки на момент времени 2200 с

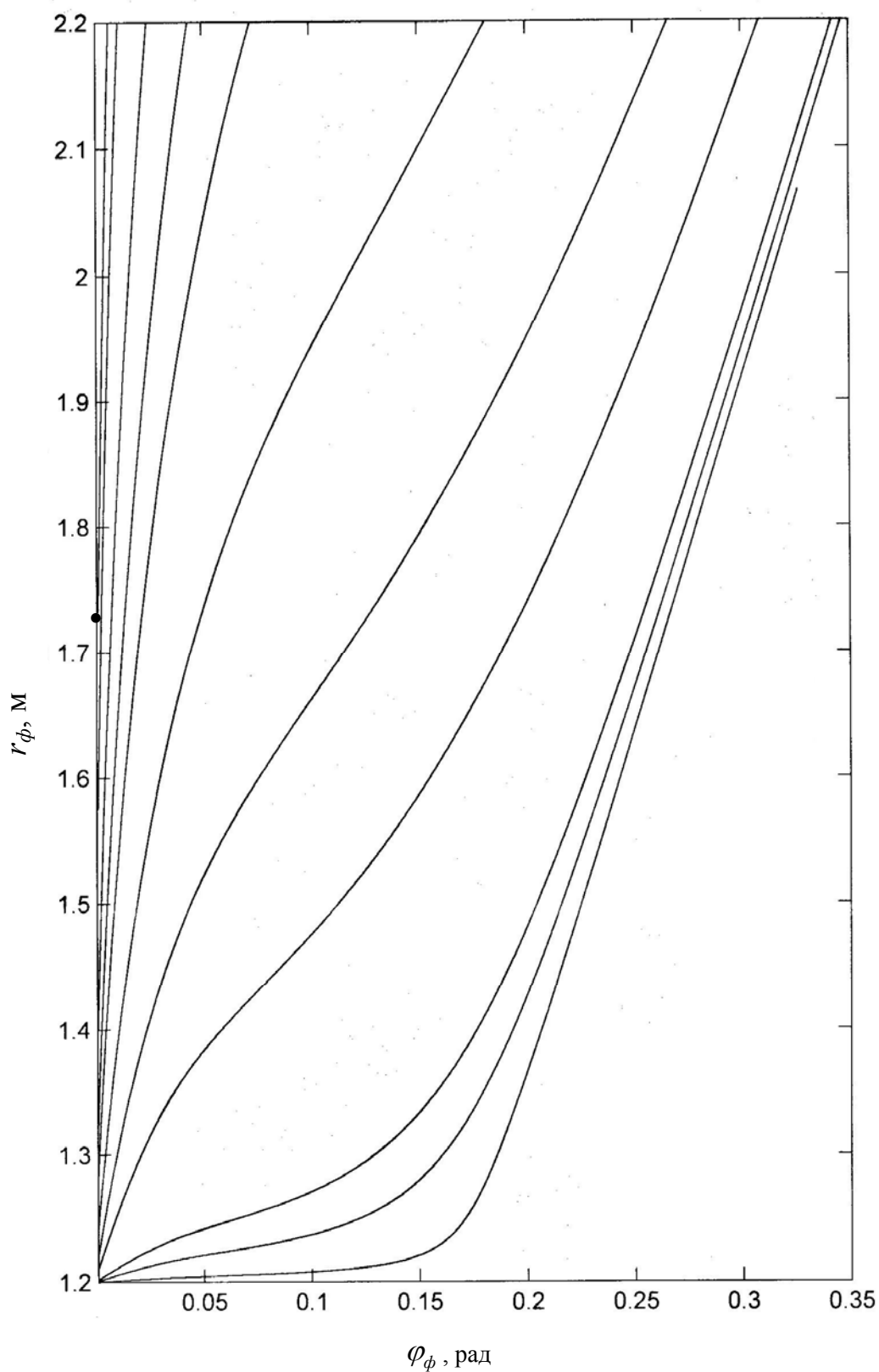


Рис. 3. Положение фронта затвердевания в изложнице с высокой теплопроводностью стенок $\lambda_3 = 58,7 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$. Черной точкой отмечено дно жидкой лунки на момент времени 2200 с

Выводы

По результатам расчетов построены графики положения фронта затвердевания в соответствующие моменты времени (1; 5; 10; 50; 100; 200; 400; 600; 10^3 ; $2 \cdot 10^3$; $2,2 \cdot 10^3$ с) для одинаковой толщины стенок изложницы с низкой теплопроводностью λ'_3 (рис. 2) и с высокой теплопроводностью λ''_3 (рис. 3). Видно, что в изложницах со стенками хорошо проводящими тепло затвердевание происходит немного быстрее. Это заметно по координате r_ϕ при $\phi = 0$: в плохо проводящей тепло изложнице она равна 1,57 м (рис. 2), а в хорошо проводящей тепло она равна 1,74 м (рис. 3). Влияние теплопроводности стенок изложницы на скорость затвердевания можно сравнить с влиянием плохо проводящих вставок в прибыльную часть слитка [2]. При замене материала вставки с чугуна на шамот последние порции жидкого металла затвердевают в нижней части прибыли, т.е. утепление прибыли за счет вставки с низкой теплопроводностью приводит к замедлению затвердевания металла в прибыли.

Список литературы

1. Вейник А. И. Теплообмен между слитком и изложницей / Вейник А. И. – М. : Metallurgizdat, 1959.
2. Самойлович Ю. А. Стальной слиток. Т. 2. Затвердевание и охлаждение / Ю. А. Самойлович, В. И. Тимошпольский, И. А. Трусова, В. В. Филиппов. – Минск : Белорусская наука, 2000.
3. Гранат И. Я. Влияние толщины стенки изложницы на ход затвердевания и качество стального слитка / И. Я. Гранат, А. А. Безденежных. – М. : Metallurgiya, 1938. – № 10.
4. Bishop H. F. Solidification mechanism of steel Ingots / H. F. Bishop, F. A. Brandt, W. S. Pellini // J. of Metals. – 1952. – Vol. 194 (January). – P. 44.
5. Дремов В.В. Вариационный и численный методы в теплофизике затвердевающего слитка / В. В. Дремов, Ф. В. Недопекин // Макеевка : ДонНАСА, 2007. – С. 34.
6. Дремов В.В. Аналитический расчет затвердевания расплава в изложнице / В. В. Дремов, Ф. В. Недопекин // ИФЖ. – 2002. – Т. 75, № 6. – С. 179–184.
7. Камкэ Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камкэ. – Москва : Наука, 1971. – С. 365.

Рукопись поступила 29.10.2009 г.